Nazwisko .... Data .... Nr na liście ....
Imię .... Wydział ....
Dzień tyg. ....
Godzina ....

Ćwiczenie 407

Badanie drgań wahadła sprężynowego

I. Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny

Ciężarek		Położenie wskaźnika		Wydłużenie	Współczynnik
masa m_i, [kg]	ciężar Q_i, [N]	bez obciążenia l_{0i}, [m]	z obciążeniem l_i, [m]	$x_{0i} = l_i - l_{0i}$, [m]	$k_i = Q_i / x_{0i}$, [N/m]
Wartość średnia współczynnika sprężystości, $k = (k_1 + k_2 + k_3)/3$					

II. Sprawdzanie prawa izochronizmu wahadła

Amplituda A_i [m]	Czas $n =$ .... drgań, t_i, [s]			Okres drgań $T = \bar{t}/n$, [s]

III. Wyznaczanie masy ciężarka

Czas $n =$ .... drgań, t_i	[s]			
Okres drgań, $T_i = t_i / n$	[s]			
Średni okres drgań, T	[s]			

Masa sprężyny, m_s	[kg]		Masa wskaźnika, m_w	[kg]	
Masa ciężarka obliczona, m_x	[kg]		Wynik ważenia ciężarka	[kg]	
Błąd bezwzględny	[kg]		Błąd względny	[%]	

Ćwiczenie 407. Badanie drgań wahadła sprężynowego

Wprowadzenie

Ruch drgający harmoniczny

Jednym z rodzajów ruchu, często spotykanym w fizyce, jest *ruch drgający,* w którym ciało porusza się tam i z powrotem po tej samej drodze. Ruchem drgającym poruszają się np. wahadło w zegarze, ciężarek zawieszony na sprężynie, czy też atomy w sieci krystalicznej. Szczególnym przykładem ruchu drgającego jest ruch harmoniczny prosty.

Ruch harmoniczny prosty występuje wtedy, gdy siła działająca na ciało drgające jest proporcjonalna do wychylenia ciała od położenia równowagi i przeciwnie do niego skierowana. Równanie ruchu punktu o masie *m*, poddanego działaniu takiej siły, jest następujące:

$$ma = -k\,x\,, \tag{1}$$

gdzie *a* jest przyspieszeniem masy *m*, *x* – jej wychyleniem od położenia równowagi, a k – współczynnikiem proporcjonalności. Jeśli uwzględnimy, że przyspieszenie *a* można wyrazić jako drugą pochodną współrzędnej *x* po czasie *t*, otrzymamy z (1) równanie

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\,, \tag{2}$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{3}$$

Możemy, więc, powiedzieć, że ruch harmoniczny prosty jest to taki ruch, w którym współrzędna opisująca ruch ciała zmienia się okresowo w sposób sinusoidalny. Wielkości występujące w powyższej funkcji charakteryzują ruch harmoniczny:

φ – *faza początkowa* ruchu; jest to kąt, który określa wartość współrzędnej *x* w chwili $t = 0$.

A – *amplituda drgań* jest to maksymalne wychylenie ciała drgającego od położenia równowagi,

ω – *częstość kołowa drgań*, spełniająca zależność

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f\,, \tag{4}$$

gdzie *T* oznacza okres, a *f* – częstotliwość drgań.

Okres drgań jest to czas, w którym wykonane jest jedno pełne drganie. W czasie okresu ciało przechodzi dwukrotnie każdy punkt swej drogi (z wyjątkiem punktów skrajnych) i wraca do stanu początkowego. *Częstotliwość drgań* jest to liczba drgań przypadających na jednostkę czasu. Okres i częstotliwość związane są zależnością

$$f \cdot T = 1.$$

Prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym otrzymamy, obliczając pochodne:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)\,.$$

Ostatnie wyrażenie, po podstawieniu (3), można zapisać:

$$a = -\omega^2 x\,. \tag{5}$$

Równanie (5) przedstawia zależność pomiędzy współrzędną położenia ciała, jego przyspieszeniem i częstością kołową drgań w ruchu harmonicznym

Przyrównując równania (2) i (5), otrzymujemy zależność

$$\omega = \sqrt{k/m}\,, \tag{6}$$

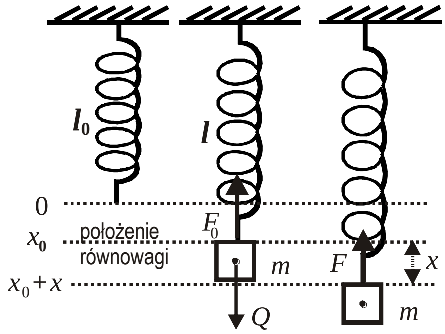
z której wynika, że częstość kołowa równa jest pierwiastkowi kwadratowemu z ilorazu współczynnika *k* i masy ciała *m*.

Ruch drgający ciała zawieszonego na sprężynie

Celem naszego doświadczenia jest obserwacja ruchu harmonicznego ciężarka zawieszonego na sprężynie, tzw. *wahadła sprężynowego*, rys.1. Ciężarek zawieszony na sprężynie spoczywa w położeniu, które jest *położeniem równowagi*. Jeśli ciężarek pociągniemy w dół poniżej położenia równowagi i puścimy, zacznie on wykonywać drgania w górę i w dół.

Na ciężarek spoczywający w położeniu równowagi działają dwie siły, które muszą się wzajemnie równoważyć. Są to siła ciężkości $\vec{Q} = m\vec{g}$ działająca pionowo w dół i siła sprężystości $\vec{F}_0$ rozciągniętej sprężyny, zwrócona przeciwnie do kierunku odkształcenia. Zgodnie z *prawem Hooka*, przy małych odkształceniach siła sprężystości jest proporcjonalna do odkształcenia x_0:

$$F_0 = -k\, x_0 . \qquad (7)$$



Rys.1 Wahadło sprężynowe

Stała k oznacza tutaj *współczynnik sprężystości sprężyny*. Współrzędną spoczynkowego odkształcenia x_0 otrzymamy z warunku równowagi sił: $\vec{Q} + \vec{F}_0 = 0$, z którego wynika , że $mg = kx_0$. Jeśli zmierzymy x_0 dla znanej masy *m* zawieszonej na sprężynie, możemy wyznaczyć jej współczynnik sprężystości *k*:

$$k = \frac{mg}{x_0} . \qquad (8)$$

Gdy ciężarek jest odchylony o *x* w górę bądź w dół od położenia równowagi, pojawia się niezrównoważona siła sprężystości *F*, proporcjonalna do *x* (prawo Hooka):

$$F = -k\, x . \qquad (9)$$

Jak już wiemy, tego typu siła odpowiedzialna jest za ruch harmoniczny ciała — możemy więc wykorzystać związki (4) i (6), z których otrzymamy wzór na okres drgań:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \qquad (10)$$

Widzimy, że okres drgań zależy tylko od masy ciężarka *m* i stałej *k* sprężyny, a nie zależy od początkowego odchylenia ciężarka od położenia równowagi. To, że okres drgań *nie zależy* od amplitudy *A* określane jest jako *prawo izochronizmu wahadła sprężynowego*. Sprawdzenie prawa izochronizm będzie jednym z celów doświadczenia.

Przy wyprowadzaniu wzoru na okres pominięta została siła oporu powietrza, która powoduje zmniejszanie się amplitudy drgań i wpływa na okres drgań. Ze względu na małą amplitudę prędkości drgań, nie będziemy jej nadal brać pod uwagę w obliczeniach.

Drugim zastosowanym przez nas uproszczeniem jest pominięcie masy sprężyny m_s. Z energetycznych rozważań o ruchu drgającym można wyprowadzić wzór uwzględniający fakt, że sprężyna ma swoją masę. „Poprawiony" wzór na okres drgań wahadła ma postać:

$$T = 2\pi\sqrt{\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)\Big/ k} . \qquad (11)$$

Jeśli wyznaczymy okres drgań nieznanej masy, zawieszonej na sprężynie o znanej wartości *k*, możemy wykorzystać wzór (11) do wyznaczenia masy ciężarka *m*.

Wykonanie ćwiczenia

Wyznaczanie współczynnika sprężystości sprężyny

1. Zawieszamy sprężynę na statywie i do jej końca przymocowujemy lekki plastykowy wskaźnik. Na podziałce liniowej, połączonej ze statywem, odczytujemy położenie poziomej kreski zaznaczonej na wskaźniku.
2. Do wskaźnika doczepiamy odważnik o znanej masie i ponownie odczytujemy położenie kreski wskaźnika. Obliczamy wydłużenie sprężyny.
3. Obliczamy ciężar zawieszonej masy i współczynnik sprężystości *k* — wzór (8).
4. Pomiary wykonujemy dla trzech różnych ciężarków i obliczamy średnią wartość *k*.

Sprawdzanie prawa izochronizmu wahadła

1. Obciążamy sprężynę odważnikiem, odciągamy go w dół np. o 1 cm i mierzymy czas kilkudziesięciu (*n*) pełnych drgań wahadła. Dla tej samej amplitudy drgań pomiary powtarzamy trzykrotnie. Obliczamy średni czas *n* drgań, a następnie okres ruchu drgającego.
2. Pomiary okresu powtarzamy jeszcze przy dwóch innych, odpowiednio powiększonych amplitudach drgań.

Uwaga: Do sprawdzania prawa izochronizmu należy odpowiednio dobrać obciążenie sprężyny. Jeśli masa *m* jest zbyt mała to drgania są za szybkie i nie jesteśmy w stanie ich policzyć, a gdy zbyt duża — drgania nie są harmoniczne (wydłużenie nie jest zgodne z prawem Hooka).

Wyznaczanie masy ciężarka

Analogicznie jak powyżej, wyznaczamy okres drgań sprężyny obciążonej nieznaną masą m_x. Przekształcając (11) otrzymamy:

$$m = k\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{1}{3}m_s .$$

Masa *m* jest sumą masy ciężarka m_x i masy wskaźnika m_w. Masę m_x obliczamy ze wzoru:

$$m_x = m - m_w = k\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{1}{3}m_s - m_w . \qquad (12)$$

Rachunek błędów

Błąd pomiaru współczynnika *k* obliczymy jako błąd maksymalny średniej z trzech pomiarów:

$$\Delta k = \max\left|k - k_i\right|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Oszacowanie błędu pomiaru masy m_x przeprowadzamy metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta m_x = \frac{T^2}{4\pi^2}\Delta k + k\frac{2T}{4\pi^2}\Delta T + \frac{1}{3}\Delta m_s + \Delta m_w .$$

$\Delta m_s = \Delta m_w$ — dokładność ważenia sprężyny i wskaźnika,

$\Delta T = \dfrac{\max\left|\bar{t} - t_i\right|}{n}$; $\quad$ (i = 1, 2, 3) $\quad$ — błąd wyznaczenia okresu.