Nazwisko .... Data .... Nr na liście ....

Imię .... Wydział ....

Dzień tyg. ....

Godzina ....

Ćwiczenie 408

Wyznaczanie momentu bezwładności bryły metodą wahadła fizycznego

Rodzaj bryły metalowej	m, [kg]	Średnica wewnętrzna D_i, [m]	$l = \frac{D}{2}$, [m]	t_i, [s]	$T = \frac{t}{n}$, [s]	I, [kg·m²]	I_s, [kg·m²]
Obręcz	1,453						
Koło – oś I	1,404						
Koło – oś II	1,404						

Liczba mierzonych, pełnych wahnięć bryły: n = ...

Oznaczenia w tabeli:

D – średnia wartość średnicy, l – odległość środka ciężkości od punktu zawieszenia, t_i – czas n pełnych wahnięć bryły, t – średni czas n wahnięć, T – okres drgań, I oraz I_s – momenty bezwładności bryły względem punktu zawieszenia oraz jej środka ciężkości.

Ćwiczenie 408. Wyznaczanie momentu bezwładności bryły metodą wahadła fizycznego

Wprowadzenie

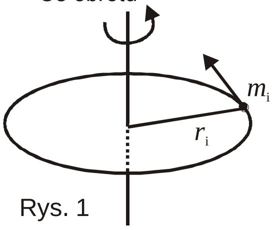
Do opisu ruchu obrotowego *brył sztywnych* wprowadzono pojęcie momentu bezwładności, który w tym przypadku jest miarą bezwładności, podobnie jak masa w ruchu postępowym. Jest to spowodowane tym, że w ruchu obrotowym bryły znaczenie ma nie tylko masa, ale i jej rozkład względem osi obrotu. Ruch obrotowy całej bryły można rozpatrywać jako sumę ruchów po okręgu poszczególnych mas elementarnych, na które można podzielić całą bryłę.

Moment bezwładności masy elementarnej m_i wyraża się wzorem

$$I_i = m_i \cdot r_i^2,$$

r_i – odległość masy elementarnej m_i od osi obrotu, rys. 1. *Całkowity moment bezwładności bryły* jest sumą momentów bezwładności mas elementarnych:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} m_i r_i^2$$



Rys. 1

Jeżeli na bryłę poruszającą się ruchem obrotowym działa moment siły $\vec{M}$, to bryła porusza się z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$, którego wartość jest proporcjonalna do wartości momentu siły i odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności bryły:

$$\varepsilon = M/I \,. \tag{1}$$

Równanie (1) wyraża treść II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego.

Wyznaczenie momentu bezwładności bryły względem wybranej osi obrotu polega na pomiarze okresu drgań wahadła fizycznego. *Wahadło fizyczne* jest to bryła sztywna zawieszona na poziomej osi, przechodzącej przez punkt O, położony powyżej środka masy S bryły, rys. 2. *Okres drgań wahadła* jest to czas, po którym bryła wraca do pierwotnego położenia, po wykonaniu jednego pełnego wahnięcia.

Jeżeli bryłę odchylimy od położenia równowagi o mały kąt α, to zacznie ona poruszać się ruchem drgającym wahadłowym o okresie T. Ruch wahadła można uważać za szczególny przypadek ruchu obrotowego, odbywającego się ze zmiennym przyspieszeniem kątowym ε. Możemy, zatem, do opisu ruchu, stosować zasadę dynamiki ruchu obrotowego wyrażoną równaniem (1).

Z rys. 2 wynika, że wartość momentu siły, działającego na bryłę odchyloną od położenia równowagi o kąt α, wynosi

$$M = -mg \cdot l \sin\alpha \tag{2}$$

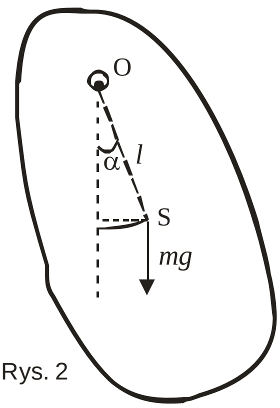
Znak "-" bierze się stąd, że moment siły działa przeciwnie do kierunku wychylenia bryły od położenia równowagi.

Podstawiamy zależność (2) do (1):

$$\varepsilon = -\frac{mgl}{I}\sin\alpha. \tag{3}$$

Uwzględniając w równaniu (3), że dla małych kątów α (w radianach) zachodzi przybliżona równość $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz podstawiając za ε drugą pochodną α po czasie (definicja przyspieszenia kątowego) otrzymamy:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl}{I}\alpha. \tag{4}$$



Rys. 2

Zależność (4) jest równaniem ruchu harmonicznego (przyspieszenie jest proporcjonalne do współrzędnej α i ma względem niej znak przeciwny). Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)\,, \tag{5}$$

gdzie α_0 jest amplitudą drgań (największe odchylenie od położenia równowagi), φ – fazą początkową ruchu (faza określa wartość kąta α w czasie t = 0), a ω jest to częstość kołowa drgań. Jak łatwo sprawdzić, na podstawie warunku $\alpha(t) = \alpha(t+T)$, ω spełnia zależność

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi f, \tag{6}$$

f – częstotliwość drgań (odwrotność okresu drgań T, czyli liczba pełnych wahnięć w czasie 1s).
Różniczkując dwukrotnie równanie (5) dostajemy:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega^2\alpha. \tag{7}$$

Przyrównując stronami (4) i (7) otrzymamy warunek, jaki musi spełniać ω:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \tag{8}$$

Jeśli w zależności (8) podstawimy $\omega = 2\pi/T$, otrzymamy wzór na moment bezwładności bryły:

$$I = \frac{mgl \cdot T^2}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Wyznaczenie momentu bezwładności sprowadza się, zatem do pomiaru okresu drgań bryły.

Duże znaczenie w ruchu obrotowym ma moment bezwładności I_s względem osi przechodzącej przez środek masy bryły. I_s nie da się zmierzyć metodą wahadła fizycznego (moment siły ciężkości jest równy zero). Można go obliczyć stosując *twierdzenie Steinera*, które mówi:

Moment bezwładności bryły względem dowolnej osi, I, jest równy momentowi bezwładności względem osi równoległej i przechodzącej przez środek ciężkości bryły, I_s, powiększonemu o iloczyn masy bryły przez kwadrat odległości pomiędzy osiami, $I = I_s + m\,l^2$. Czyli

$$I_s = I - m\,l^2. \tag{10}$$

Wykonanie zadania

Pomiary wykonujemy dla obręczy i koła metalowego.

1. Mierzymy suwmiarką trzykrotnie, w różnych przekrojach, wewnętrzną średnicę bryły D_i. Obliczamy średnią wartość promienia bryły — *l*.
2. Zawieszamy bryłę na statywie, odchylamy ją nieznacznie od położenia równowagi i po ustaniu poślizgów mierzymy czas kilkudziesięciu pełnych wahnięć. Pomiar powtarzamy trzykrotnie i obliczamy średni okres drgań *T*.
3. Obliczamy moment bezwładności *I*, wzór (9), oraz I_s, wzór (10).

Rachunek błędów

Błąd bezwzględny ΔI obliczamy metodą pochodnej logarytmicznej na podstawie wzoru (9):

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T}. \tag{11}$$

Przyjmujemy Δm = 0 (nie ważymy brył) oraz Δg = 0. Wzór (11) upraszcza się do postaci

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T} \tag{12}$$

Wykorzystując wzór (12) obliczamy błąd bezwzględny ΔI oraz błąd względny procentowy

$$B_p = (\Delta I / I) \cdot 100\%$$

Wartości Δl i ΔT obliczamy: $\Delta l = \dfrac{\max|D - D_i| + 0{,}1\text{mm}}{2}$, $\Delta T = \dfrac{\max|t - t_i|}{n}$; $i = 1,2,3$.