Nazwisko .... Data .... Nr na liście ....

Imię ....

Wydział ....

Dzień tyg. ....

Godzina ....

Ćwiczenie 410

Wyznaczanie modułu Younga metodą zginania pręta

Pomiary rozmiarów pręta

Rodzaj pręta	Długość* l, [m]	Szerokość a_i, [mm]	Grubość h_i, [mm]	C $[\mathrm{m}^{-1}]$

***Uwaga**: Długość pręta liczona jest pomiędzy punktami podparcia.

Pomiary strzałki ugięcia

Rodzaj pręta	Masa obciążenia	Wskazania mikromierza, [mm], przy obciążeniu		Strzałka ugięcia, Y_i	Q_i/Y_i	Średnia, $k = Q/Y$	Moduł Younga, E	**Tablicowy** moduł Younga, E
	[g]	rosnącym	malejącym	[mm]	[N/m]	[N/m]	[GPa]	[GPa]
	0			——	——			
	0			——	——			

Ćwiczenie 410. Wyznaczanie modułu Younga metodą zginania pręta

CEL

Celem tego ćwiczenia jest wyznaczenie modułu Younga metali i drewna metodą zginania płaskownika za pomocą pomiaru strzałki ugięcia.

TEORIA

Prawo Hook'a

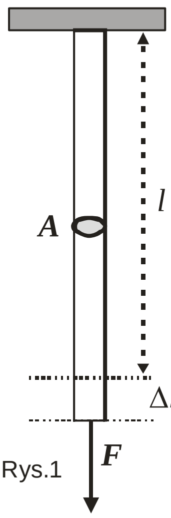
Jeżeli na unieruchomione ciało sprężyste podziałamy siłą, to powstaną w tym ciele naprężenia, wywołujące jego odkształcenie. *Naprężenie* σ w pręcie o przekroju poprzecznym *A*, na który działa siła $\vec{F}$ (prostopadła bądź styczna do *A*) równe jest stosunkowi siły do pola przekroju pręta:

$$\sigma = F/A \tag{1}$$

Naprężeniu stawiają opór siły międzycząsteczkowe wewnątrz materiału. Rozróżnia się zwykle trzy rodzaje naprężeń: rozciągające (wydłużają ciało), ściskające (skracają ciało) i ścinające (deformują postać ciała). W ostatnim przypadku siła działa stycznie do powierzchni przekroju.

Zmiana długości pręta spowodowana rozciąganiem lub ściskaniem jest proporcjonalna do jego długości. Jeśli, na przykład, pręt o długości *l*, rozciągany siłą $\vec{F}$, zwiększa swoją długość o Δl, rys. 1, to miarą odkształcenia ε jest względna zmiana długości:

$$\varepsilon = \Delta l / l\,. \tag{2}$$



Rys.1

Gdy po usunięciu siły $\vec{F}$ ciało wraca do swych wymiarów, to *odkształcenie nazywamy sprężystym*. Przy małych odkształceniach, ε jest proporcjonalne do σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma\,. \tag{3}$$

E jest *modułem sprężystości* (nazywanym *modułem Younga*) danego materiału. Moduł Younga jest równy liczbowo naprężeniu, przy którym względna zmiana długości pręta byłaby równa jedności. Moduł Younga wyraża się, tak jak naprężenie czy ciśnienie, w paskalach: $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$.

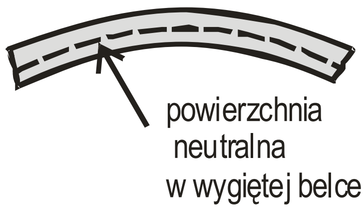
Liniowa zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem znana jest, jako *prawo Hooke'a*. Po podstawieniu do (3) wzorów definiujących ε i σ, otrzymamy:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{A} F\,. \tag{4}$$

A zatem, prawo Hooke'a stwierdza, że podczas rozciągania lub ściskania zmiana długości jest proporcjonalna do działającej siły.

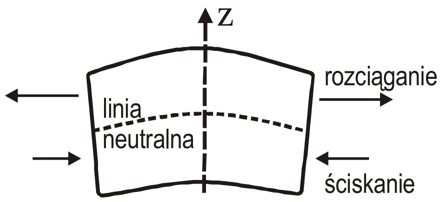
Najprostszy sposób wyznaczenia modułu Younga polega na pomiarze przyrostu długości Δl pręta o długości *l* i polu przekroju *A*, umocowanego jednym końcem i rozciąganego siłą *F*. Jednak w przypadku grubszych prętów trudno jest uzyskać ich mierzalne wydłużenia, z uwagi na konieczność użycia bardzo dużych sił. Z tego względu wykorzystujemy odkształcenia złożone, do których należy zginanie pręta umocowanego z jednej strony lub podpartego na obu końcach.

Ugięcie pręta



Zginanie belki można sprowadzić do jednoczesnego jej rozciągania i ściskania. Wzdłuż wygiętej belki występuje warstwa, zwana *powierzchnią neutralną*, której długość przy wygięciu nie ulega zmianie. Powyżej tej powierzchni siły deformujące mają kierunek rozciągający warstwy górne, poniżej — kierunek przeciwny i powodują ściskanie warstw dolnych.

Siły te występują parami i tworzą moment zginający $\vec{M}$ względem linii neutralnej.



Wycinek przekroju podłużnego belki

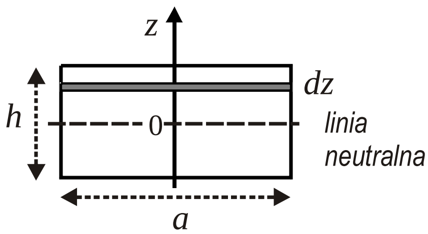
Można wyprowadzić następującą zależność pomiędzy momentem zginającym i modułem sprężystości belki:

$$M = \frac{E\,I}{R}. \qquad (5)$$

We wzorze tym R jest *promieniem krzywizny* ugiętej belki (jest to promień okręgu, którego fragment stanowi ugięta belka) natomiast I oznacza *moment bezwładności przekroju*.

Moment bezwładności przekroju określony jest przez rozkład elementów powierzchni przekroju względem linii neutralnej. Jeżeli przez z wyrazimy odległość elementu powierzchni przekroju dS od linii neutralnej, to I zdefiniowany jest wzorem:

$$I = \int_S z^2 dS .$$



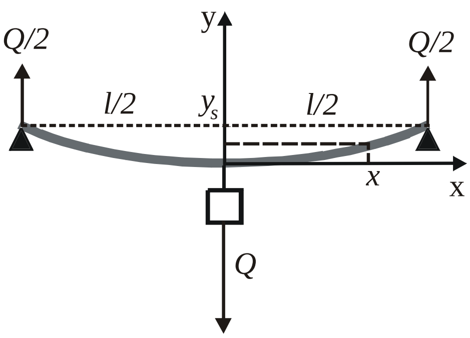
Przekrój poprzeczny pręta

Obliczając tę całkę powierzchniową dla przekroju prostokątnego o szerokości a i grubości h otrzymamy następujący wzór na moment bezwładności przekroju:

$$I = \frac{a \cdot h^3}{12}. \qquad (6)$$

Rozpatrzymy ugięcie belki o długości l podpartej na obu końcach i obciążonej po środku masą m o ciężarze Q. Każda z podpór działa na belkę siłą reakcji równą $Q/2$, a środkowa część belki pozostaje pozioma. Ugięcie belki rozpatrzymy względem układu współrzędnych, którego początek umiejscowimy w środku belki. Moment siły reakcji działającej na koniec belki, liczony względem punktu leżącego w odległości x od środka belki, wynosi (przy niewielkich ugięciach):

$$M = \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right).$$



Promień krzywizny R ugiętej belki określony jest równaniem, którego przybliżona postać, w naszym przypadku, jest następująca:

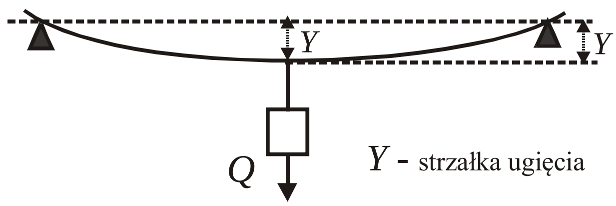
$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Po podstawieniu ostatnich dwóch wzorów do zależności (5) otrzymamy równanie, którego rozwiązanie określa linię ugięcia belki $y = f(x)$.

Jeżeli w funkcji $y = f(x)$ podstawimy za x wartość współrzędnej w punkcie podparcia, $x = l/2$, otrzymamy maksymalną wartość współrzędnej $y = y_{\max} = Y$.

Wartość współrzędnej y w miejscu podparcia nazywamy *strzałką ugięcia Y*. Wzór na strzałkę ugięcia ugiętej belki jest następujący:

$$Y = \frac{Q}{48EI} l^3 .$$

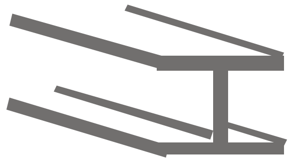


Dla przekroju prostokątnego otrzymamy:

$$Y = \frac{Ql^3}{4Eah^3}. \qquad (7)$$

Ze wzoru na strzałkę ugięcia wynika, że ugięcie belki jest odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności przekroju i jeżeli belka ma przekrój prostokątny, to strzałka jest odwrotnie proporcjonalna do grubości belki h podniesionej aż do trzeciej potęgi.

Powyższe wnioski sugerują, że aby konstruować mocne, lekkie elementy, większość materiału powinno lokalizować się możliwie daleko od powierzchni neutralnej.



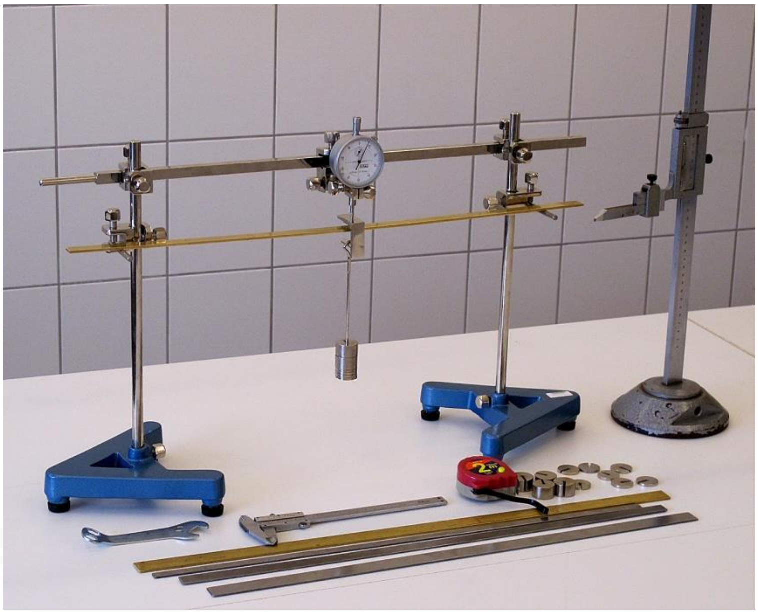
Np. dwuteownik lepiej opiera się momentom sił zginających działających w kierunku prostopadłym do jego długości aniżeli belka o kwadratowym przekroju poprzecznym wykonana z tej samej ilości materiału.

Pomiar strzałki ugięcia Y dla danego obciążenia Q pozwala wyznaczyć moduł Younga materiału, z którego pręt wykonano. Przekształcając wzór (7) otrzymujemy:

$$E = \frac{l^3}{4ah^3} \cdot \frac{Q}{Y}\,. \tag{8}$$

POTRZEBNE WYPOSAŻENIE	• Płaskie pręty metalowe i drewniane
• Dwa statywy z kompletem zacisków	• Suwmiarka
• Belka poprzeczna	• Taśma pomiarowa
• Czujnik mikrometryczny tarczowy	• Komplet odważników o masie 10 g i 50 g
• Katetometr do ustawiania wysokości podpór podtrzymujących pręty	• Strzemiączko i wieszak do podwieszania obciążenia

Wykonanie zadania



1. Przygotowanie układu pomiarowego

- Sprawdzamy, czy układ pomiarowy jest przygotowany zgodnie z załączonym zdjęciem.
- Wybieramy dwa lub trzy pręty do pomiarów. Pręty są metalowe (żelazo, mosiądz) i drewniane.

2. Pomiar rozmiarów pręta

- Mierzymy miarką milimetrową odległość l pomiędzy środkami podpór. Wynik jest miarą efektywnej długości uginanego pręta.
- Sprawdzamy suwmiarką szerokość a i grubość h wybranych prętów. Pręty mogą mieć następujące szerokości, w [mm]: 10; 15; 20 i grubości, w [mm]: 1,5; 2,0; 3,0; 5,0.
- Obliczamy stałą pręta C: $$C = \frac{l^3}{4ah^3}\,.$$

3. Wyznaczanie stosunku Q/Y

- Ważymy wieszak na odważniki m_w, i sprawdzamy masę załączonych odważników.
- Badany pręt kładziemy na podporach zamocowanych przy statywach.
- Na środek pręta nakładamy strzemiączko i ustawiamy je pod czujnikiem mikrometrycznym tak, aby jego końcówka opierała się na wgłębieniu na górnej powierzchni strzemiączka.

Uwaga: Nie należy uginać pręta, aby podsunąć go pod końcówkę czujnika, tylko podnieść końcówkę czujnika uchwytem nad tarczą.

- Odczytujemy wskazania mikromierza y_0. Jest to odczyt zerowy (dla pręta obciążonego tylko strzemiączkiem).

  ***Uwaga**: wskazania czujnika mikrometrycznego dla pręta ze strzemiączkiem powinny wynosić około 5 mm, gdy strzemiączko znajduje się na pręcie o grubości 2mm. W razie potrzeby należy zgłosić prowadzącemu zajęcia konieczność regulacji wysokości podpór.*

- Do strzemiączka podwieszamy pierwsze obciążenie (Q_1) (wieszak i ciężarki). Wartość obciążenia powinna wynosić od 100 g do 150 g. Odczytujemy wskazanie mikromierza y_1.

  ***Uwaga**: Podczas obciążania pręta strzemiączko może poruszyć się, dlatego należy przy każdej zmianie obciążenia sprawdzić położenie końcówki czujnika mikrometrycznego względem strzemiączka.*

- Różnica $Y_1 = |y_1 - y_0|$ daje pierwszą strzałkę ugięcia Y_1.
- Pomiary strzałek ugięcia $Y_i = |y_i - y_0|$ przeprowadzamy jeszcze dwa razy, zwiększając obciążenie za każdym razem o 100 g (lub wg wskazań prowadzącego zajęcia).
- Najpierw wyznaczamy strzałki ugięcia przy obciążeniach rosnących, a następnie malejących. Z dwóch uzyskanych wyników dla danej wartości obciążenia obliczamy wartość średnią, którą przyjmujemy, jako właściwą wartość strzałki ugięcia.
- Dla każdego obciążenia obliczamy iloraz Q_i/Y_i, $\quad i = 1, 2, 3.$
- Obliczamy średnią wartość Q/Y. Jeśli wprowadzimy oznaczenie dla pojedynczego pomiaru: $k_i \equiv Q_i/Y_i$ oraz dla wartości średniej $k \equiv Q/Y$, to możemy ją wyrazić następująco:

$$k = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3}, \tag{9}$$

4. Obliczanie modułu Younga

Zgodnie z wzorem (8) iloczyn stałej pręta *C* i wartości *k* (średniego stosunku *Q* do *Y*) równy jest modułowi Younga dla danego pręta o przekroju prostokątnym:

$$E = C \cdot k\,. \tag{11}$$

Rachunek błędów

Błąd pomiaru *Δk,* obliczamy, jako błąd bezwzględny maksymalny pomiędzy wartością średnią *k* i każdym z trzech pomiarów k_i:

$$\Delta k = \max|k - k_i|; \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Pozostałe błędy złożonych wielkości fizycznych określamy metodą pochodnej logarytmicznej.

$$\frac{\Delta C}{C} = 3\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta h}{h}\right) + \frac{\Delta a}{a}.$$

Przyjmujemy: *Δl* = 4mm, *Δa* = 0,05mm, *Δh* = 0,05mm.

$$\Delta E = E\left(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta C}{C}\right).$$

Obliczamy także błąd względny procentowy modułu Younga: $B_p = \frac{\Delta E}{E} \cdot 100\%.$

Wnioski

Porównujemy obliczone wartości modułu Younga z wartościami tablicowymi. Obliczamy błędy względem wartości tablicowej. Porównujemy te błędy z wartościami z rachunku błędów.