Nazwisko .... Data .... Nr na liście ....

Imię ....

Wydział ....

Dzień tyg. ....

Godzina ....

Ćwiczenie 415

Pomiar masy i średniej gęstości kuli ziemskiej

I. Pomiar przyspieszenia ziemskiego

Masa ciężarka m, [g]	Długość wahadła L, [m]	Liczba wahnięć n	Czas n wahnięć t, [s]	Okres drgań $T = t/n$ [s]	Przyspieszenie ziemskie g_i, [m/s^2]

II. Wyniki obliczeń

		wartość	*błąd względny* [%]	*Wartości tablicowe**
Przyspieszenie ziemskie $\bar{g}$	[m/s^2]			
Masa Ziemi M	[kg]			
Średnia gęstość kuli ziemskiej ρ_{Ziemi}	[kg/m^3]			

* szukaj w Tablicach Matematyczno-Fizycznych

Ćwiczenie 415. Pomiar masy i średniej gęstości kuli ziemskiej

1. Wprowadzenie

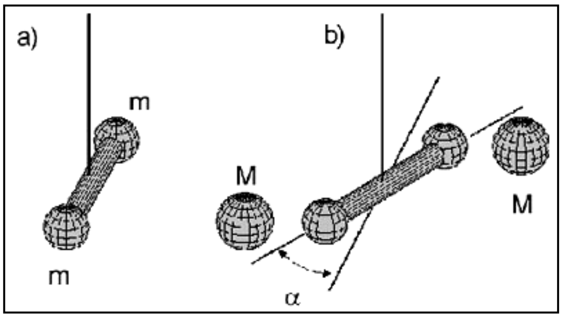
Celem ćwiczenia jest pomiar masy kuli ziemskiej i jej średniej gęstości poprzez pomiar przyspieszenia ziemskiego metodą badania ruchu wahadła.

1.1 Grawitacja

Siła przyciągania wzajemnego F ciał sferycznie symetrycznych o masach M i m ma wartość:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}, \tag{1}$$

gdzie R jest odległością pomiędzy środkami mas obu ciał, a G oznacza stałą grawitacji. gdzie R jest odległością pomiędzy środkami mas obu ciał, a G oznacza stałą grawitacji.



Dla dociekliwych

Wartość stałej grawitacji wyznaczył w 1798 roku Henry Cavendish za pomocą wagi torsyjnej (wagi skręceń):

Na sprężystej kwarcowej nici Cavendish *zawiesił poziomo pręt z dwiema małymi kulkami ołowianymi o masach m (rysunek a). Następnie w pobliżu każdej z kulek umieścił większą kulę ołowianą o masie M i zmierzył precyzyjnie kąt o jaki obrócił się pręt (rysunek_b). Na podstawie pomiaru kąta obrotu α wyznaczył G.*

Obecnie przyjmowaną wartością G jest: $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

Ponieważ znamy promień Ziemi (np. z pomiaru obwodu Ziemi), przyspieszenie grawitacyjne g, to wartość stałej G umożliwia obliczenie masy Ziemi M i średniej gęstości ρ_{Ziemi} naszej planety (4):

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \tag{2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G} \tag{3}$$

$$\rho_{Ziemi} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{4}$$

Przyspieszenie ziemskie zależy od szerokości geograficznej (z powodu siły odśrodkowej wywołanej obrotem kuli ziemskiej oraz faktem, że kula ziemska jest nieznacznie spłaszczona na biegunach) i wysokości nad powierzchnią morza (głównie z powodu zmiany odległości od środka Ziemi) jednak zmiany te są stosunkowo niewielkie i nawet między równikiem i biegunem nie przekraczają 0,5 %. Wartość g dla Warszawy (100 m n.p.m) wynosi 9.81230 m/s^{2}.

Z pomiarów geograficznych średni promień kuli ziemskiej R wynosi 6371 km.

1.2 Wahadło matematyczne

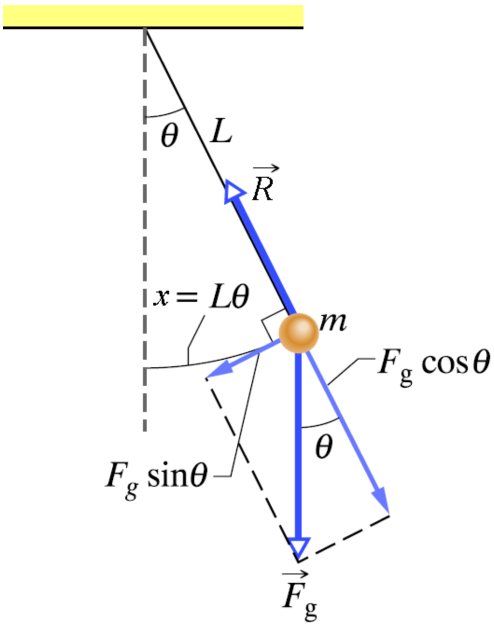
Wahadło matematyczne to punktowe ciało o masie m wahające się w jednej płaszczyźnie na nierozciągliwej i nieważkiej nici o długości L.

Oznaczenia:

m – masa wahadła, L – długość wahadła,

θ – kąt odchylenia od położenia równowagi,

F_g – siła ciężkości, $F_g = mg$,



t – czas, g – przyspieszenie ziemskie,

ω – częstość ruchu wahadła, T – okres wahań,

x – przemieszczenie masy m wzdłuż łuku, $x = L\theta$,

θ_m – maksymalne odchylenie wahadła (amplituda drgań),

R – siła reakcji nici, $\pi = 3{,}14159...$.

Składowa siły ciężkości $mg\cos\theta$ naciąga nić i jest równoważona siłą reakcji nici R. Ciężarek wprawia w ruch składowa siły ciężkości $mg\sin\theta$. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika równanie $ma = mg\sin\theta$. Ponieważ $a = d^2x/dt^2$ i $x = L\theta$, równanie ruchu ciężarka ma postać:

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \tag{5}$$

Równanie to nie zawiera masy ciężarka, z czego wynika wniosek, że ruch wahadła a więc i okres jego drgań nie zależy od masy ciężarka.

Równanie (5) nie opisuje ruchu prostego oscylatora harmonicznego, gdyż druga pochodna kąta odchylenia θ nie jest proporcjonalna do θ ale do $\sin\theta$. Oznacza to, że okres drgań wahadła będzie zależał od amplitudy drgań.

Dla małych wartości kąta θ (dla małych wychyleń wahadła) można zastosować przybliżenie $\sin\theta \cong \theta$ i wtedy ruch ciężarka opisuje równanie prostego oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{6}$$

Częstość kątowa dla takiego oscylatora wyraża się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{7}$$

zaś okres drgań:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{8}$$

Okres drgań wahadła *bez przybliżenia* małych odchyleń otrzymamy rozwiązując równanie (5):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot\left[\ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \dots\right] \tag{9}$$

Wyniki obliczeń okresu wahań według pełnego wzoru (9), zebrane w tabeli I, pozwalają ocenić błąd stosowania przybliżenia małych odchyleń.

Tabela I.

θ_m (stopnie)	Błąd okresu dla przybliżenia małych kątów odchylenia
5	0.048%
10	0.19%
15	0.43%
20	0.75%
30	1.7%
40	3.2%

Z tabeli I wynika, że dla wahadeł o kącie maksymalnego odchylenia mniejszym niż 20 stopni stosowanie wzoru uproszczonego powoduje błąd mniejszy niż 1%.

Pomiar długość L i okresu wahań T wahadła pozwala obliczyć przyspieszenie ziemskie g ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}\,. \tag{10}$$

Po wyznaczeniu wartości przyspieszenia ziemskiego obliczamy ze wzorów (3) i (4) odpowiednio masę Ziemi i średnią gęstość kuli ziemskiej.

2. WYKONANIE ĆWICZENIA.

1. Zapisujemy długości i masy wahadeł.
2. Wahadła wprawiamy kolejno w drgania o małej amplitudzie (maksymalne odchylenie **nie powinno przekraczać 5 cm**) i tak by wahania odbywały się w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do ściany.
3. Mierzymy czas pełnych **20** wahnięć dla długich wahadeł, a dla krótkich wahadeł **30**. Pamiętaj, że jedno pełne wahnięcie jest wtedy gdy ciężarek wróci do położenia w którym uruchomiono pomiar czasu.
4. Wyniki wpisujemy do tabeli pomiarowej.
5. Wykonujemy obliczenia.

3. RACHUNEK BŁĘDÓW.

W ćwiczeniu mamy do czynienia z pomiarem g powtórzonym 10-krotnie. Oznaczmy kolejne wyniki N-krotnie powtórzonego pomiaru przez g_i, gdzie indeks i oznacza numer pomiaru ($i = 1, ..., N$). Średnia arytmetyczna $\bar{g}$ z wyników pomiarów jest dobrym oszacowaniem „prawdziwej" wartości g:

$$\bar{g} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i = \frac{g_1 + g_2 + ... + g_N}{N} \tag{11}$$

Za miarę niepewności pomiarowej średniej arytmetycznej wartości g przyjmujemy błąd średni kwadratowy σ (tzw. odchylenie standardowe wartości średniej):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{g} - g_i\right)^2}{N\left(N-1\right)}} \tag{12}$$

Uznajemy, że błąd wyznaczonej wartości g wynosi σ, co możemy zapisać w postaci $g = \bar{g} \pm \sigma$.

Błąd względny wyznaczenia masy Ziemi M i średniej gęstości kuli ziemskiej możemy przyjąć jako równy błędowi względnemu Δg/g wyznaczenia g:

$$\Delta g / g = \sigma / \bar{g}\,.$$

We wnioskach, oprócz porównania uzyskanych wyników z danymi literaturowymi, dodatkowo rozważamy, czy:

- masa ciężarka ma wpływ na uzyskane wyniki;
- dla wykorzystywanych wahadeł słuszne jest przybliżenie wahadła matematycznego;
- występowały inne czynniki nie uwzględnione w analizie ruchu wahadła.