9

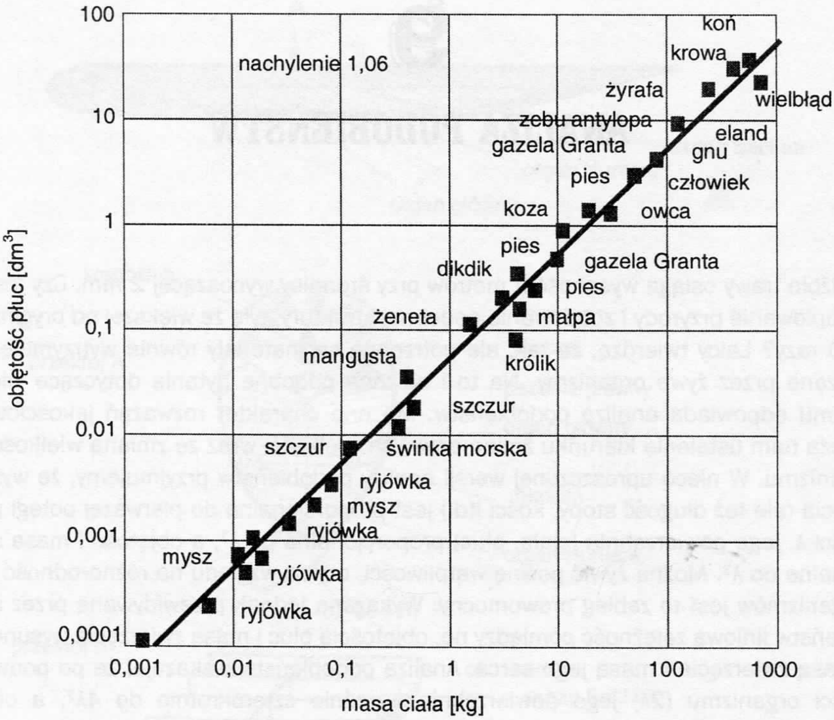
ANALIZA PODOBIEŃSTW

Źdźbło trawy osiąga wysokość 2 metrów przy średnicy wynoszącej 2 mm. Czy jest możliwe skopiowanie przyrody i zbudowanie podobnej struktury, tyle że większej od oryginału np. 10 000 razy? Laicy twierdzą, że tak, ale potrzebne są materiały równie wytrzymałe jak te wytwarzane przez żywe organizmy. Na to i na inne podobne pytania dotyczące wielkości organizmu odpowiada analiza podobieństw. Ma ona charakter rozważań jakościowych – wystarcza nam ustalenie kierunku zmian pewnych wielkości wraz ze zmianą wielkości całego organizmu. W nieco uproszczonej wersji analizy podobieństw przyjmujemy, że wysokość zwierzęcia (ale też długość stopy, kości itd.) jest proporcjonalna do pierwszej potęgi pewnej wielkości λ, jego powierzchnia (ciała, płuc) proporcjonalna do λ^2, a objętość i masa są proporcjonalne do λ^3. Można żywić pewne wątpliwości, czy ze względu na różnorodność kształtów organizmów jest to zabieg prawomocny. Wykazano jednak przewidywaną przez analizę podobieństw liniową zależność pomiędzy np. objętością płuc i masą zwierzęcia (rysunek 9.1) oraz masą zwierzęcia i masą jego serca. Analiza podobieństw wskazuje, że po podwojeniu wielkości organizmu (2λ) jego powierzchnia wzrośnie czterokrotnie do $4\lambda^2$, a objętość ośmiokrotnie $8\lambda^3$.

W wielu zagadnieniach biofizycznych ważną rolę odgrywa stosunek masy do powierzchni ciała. Na przykład przemianom chemicznym w organizmie towarzyszy wydzielanie ciepła. Ciepło produkowane jest przez każdą komórkę organizmu, czyli jest proporcjonalne do masy ciała m (i do jego objętości). Ciepło musi być wydalane z organizmu, aby nie dopuścić do wzrostu temperatury ciała. Są różne mechanizmy wydzielania ciepła: promieniowanie, przewodnictwo, konwekcja czy parowanie potu, ale w każdym z nich wydzielone ciepło jest proporcjonalne do powierzchni ciała A. Stosunek ciepła produkowanego do wydalanego jest równa:

$$\frac{\Delta Q_{\text{prod}}}{\Delta Q_{\text{wydal}}} \approx \frac{m}{A} \approx \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda$$

Wynik oznacza, że dla zwierząt stałocieplnych powiększanie rozmiarów organizmu utrudnia odprowadzanie ciepła i grozi przegrzaniem. Dla dużych zwierząt problemem jest efektywne chłodzenie organizmu, np. słonie wykorzystują do chłodzenia skórę uszu. Powyżej pewnej wielkości organizmu odprowadzenie ciepła na lądzie staje się niemożliwe i większe zwierzęta stałocieplne spotykane są w wodzie – ułatwiającej odprowadzanie ciepła. Z kolei małe zwierzęta mają problem z utrzymaniem temperatury ciała z powodu zbyt dużej utraty ciepła. Muszą one spożywać duże ilości pożywienia, aby dostarczyć odpowiednią ilość energii do organizmu. Jednak ilość spożywanego pożywienia jest ograniczona wielkością żołądka. Oznacza to, że zwierzęta stałocieplne nie mogą być mniejsze od ryjówek czy kolibrów, ponieważ nie zdołałyby utrzymać temperatury wyższej od otoczenia.



Rysunek 9.1. Pomiędzy masą zwierzęcia i objętością jego płuc jest zależność liniowa

Wielkość organizmu, zwłaszcza organizmów jednokomórkowych (bakterii, drożdży), jest ograniczona dyfuzją (dopływem) substancji pokarmowych i tlenu. W miarę powiększania się rozmiarów komórki rośnie, proporcjonalnie do jej objętości, jej zapotrzebowanie na tlen. Jednocześnie ilość tlenu przenikającego do komórki jest proporcjonalna do powierzchni komórki. Czyli substancja przenika proporcjonalnie do powierzchni λ^2, a zapotrzebowanie jest proporcjonalnie do objętości komórki λ^3. Stosunek ilości substancji wnikającej do zapotrzebowania organizmu jest proporcjonalny do:

$$\frac{m_{\text{przen}}}{m_{\text{zużyw}}} \approx \frac{A}{V} \approx \frac{\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda}$$

Oznacza to, że ze zwiększeniem wielkości komórek zmniejsza się ilość dostępnych dla nich tlenu i substancji odżywczych. Organizmy jednokomórkowe muszą być małe, a większe organizmy wielokomórkowe mogą zapewnić tlen i substancje odżywcze komórkom znajdującym się wewnątrz ciała tylko na zasadzie transportu wymuszanego mechanicznie.

Wielkość organizmu jest również ograniczona przez ciśnienie wywierane przez masę organizmu na podstawę, czyli kości nóg i stopy w przypadku zwierząt i pień w przypadku drzew. Ciśnienie wywierane na podstawę nie może być większe od wytrzymałości materiału (kości, drewna). Jeżeli ciśnienie i wytrzymałość zrównują się, to kość (lub pień) ulega złamaniu. Ciężar organizmu jest proporcjonalny do jego objętości – λ^3, a powierzchnia na którą wywierany jest nacisk do λ^2; oznacza to, że:

$$\text{ciśnienie} = \frac{mg}{A} \approx \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda$$

im większy organizm, tym większe jest obciążenie podstawy, kończyn itd. Dlatego nie jest możliwe powiększanie rozmiarów liniowych organizmu czy budowli stojącej na ziemi z powodu zbytniego wzrostu ciśnienia działającego na podstawę. Dziennikarski zachwyt nad trawą osiągającą 2 metry wysokości przy 2 mm średnicy i pogarda dla techniki nie mogącej zbudować wieży o podobnych proporcjach wynika z nieznajomości analizy podobieństw.

Rozważmy zagadnienie: czy szybciej biegają zwierzęta duże, czy małe? Wykorzystajmy równanie na energię kinetyczną:

$$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

gdzie: m – masa, v – prędkość zwierzęcia. Z kolei energia kinetyczna jest wytwarzana przez pracę mięśni. Praca (energia) jest równa iloczynowi siły działającej F i drogi s, po której siła działa:

$$E = F \cdot s$$

Siła powodująca bieg to siła mięśni nóg. Wielkość siły wywieranej przez mięśnie jest proporcjonalna do powierzchni przekroju mięśnia, a droga, na której działa siła jest proporcjonalna do długości nogi. Przekształcając otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{m}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 \cdot \lambda}{\lambda^3}} = 1$$

W wyniku otrzymujemy liczbę niemianowaną, co oznacza, że prędkość nie jest proporcjonalna do rozmiarów zwierzęcia. Można podać wiele przykładów dużych ssaków biegających szybko oraz takich, które biegną wolno, a także szybko i wolno poruszających się małych ssaków.

Zadajmy pytanie: które zwierzę – małe czy duże – może osiągnąć większe przyspieszenie? Druga zasada dynamiki Newtona wiąże przyspieszenie a z siłą działającą F:

$$F = m \cdot a$$

Ponieważ siła zwierzęcia jest proporcjonalna do przekroju jego mięśni, czyli do λ^2, a masa do λ^3, wobec tego:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda}$$

Wynik oznacza, że większe przyśpieszenia osiągają zwierzęta małe.

Z kolei rozważmy: czy wyżej skaczą zwierzęta duże, czy małe? Wykorzystamy równanie na energię potencjalną:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

gdzie: h to wysokość skoku, i – podobnie jak w analizie prędkości poruszania się zwierząt – równanie przyrównujące energię do siły działającej po pewnej drodze s. Droga, na której działa siła jest proporcjonalna do długości uda, czyli do λ. Przekształcając otrzymujemy:

$$h = \frac{F \cdot s}{m \cdot g} = \frac{\lambda^2 \cdot \lambda}{\lambda^3} = 1$$

W wyniku otrzymujemy liczbę niemianowaną, czyli wysokość skoku nie zależy od wielkości zwierzęcia. Jest to zgodne z naszymi obserwacjami - pchła skacze mniej więcej tak wysoko jak człowiek.

Analizę wymiarową możemy zastosować w analizie prędkości bicia serca, choć jest to zagadnienie o wiele bardziej skomplikowane od dotychczas omawianych. Jeżeli zwrócimy uwagę, że krew służy do przenoszenia w organizmie tlenu i substancji odżywczych, to stanie się oczywiste, że im większa objętość zwierzęcia, tym większa musi być objętość krwi przepływającej. Wielkość serca jest proporcjonalna do trzeciej potęgi rozmiarów zwierzęcia, ale szerokość aorty do drugiej potęgi wielkości zwierzęcia. Zgodnie z równaniem Poiseuille'a, przepływowi krwi przez aortę towarzyszy opór lepkościowy proporcjonalny do:

$$V \approx \frac{\Delta p \cdot r^4 \cdot t}{l}$$

gdzie: Δp - ciśnienie krwi, r - promień aorty, l - jej długość, t - to czas jednego skurczu.

Ciśnienie krwi musi być proporcjonalne do wysokości zwierzęcia - tym większe, im wyżej od serca musi dotrzeć krew (czyli $\Delta p \sim \lambda$). Czas jednego skurczu jest więc proporcjonalny do:

$$t \approx \frac{\Delta p \cdot r^4}{V \cdot l} = \frac{\lambda \cdot \lambda^4}{\lambda^3 \cdot \lambda} = \lambda$$

Odwrotnością czasu koniecznego do wykonania pojedynczego skurczu jest częstość bicia serca ν.

$$\nu = \frac{1}{t} = \frac{1}{\lambda}$$

Jest ona odwrotnie proporcjonalna do wielkości zwierzęcia - co potwierdzają obserwacje bardzo szybko bijącego serca myszy czy kolibra.

10

LITERATURA

Błony biologiczne. K. Dołowy, A. Szewczyk i S. Pikuła. Wydawnictwo Śląsk, Katowice–Warszawa 2002.

Biofizyka – podręcznik dla studentów. F. Jaroszyk (red.). PZWL, Warszawa 2001.

Elementy fizyki, biofizyki i agrofizyki. S. Przestalski. Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2001.

Wybrane zagadnienia z biofizyki. S. Miękisz i A. Hendrich (red.). Volumed, Wrocław 1998.

Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt. K. Schmidt-Nielsen. PWN, Warszawa 1994.